Language: **Slovak**

Day: **1**

8. apríla 2022

Úloha 1. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník spĺňajúci $|BC| < |AB|$ a $|BC| < |CA|$. Bod P leží na úsečke AB a bod Q leží na úsečke AC tak, že $P \neq B$, $Q \neq C$ a $|BQ| = |BC| = |CP|$. Nech T je stred kružnice opísanej trojuholníku APQ, H je ortocentrum ABC a S je priesečník priamok BQ a CP. Dokážte, že body T, H, S ležia na jednej priamke.

Úloha 2. Nech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ označuje množinu kladných celých čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre všetky kladné celé čísla a a b platia obe podmienky:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$,

(2) aspoň dve z čísel $f(a)$, $f(b)$, $f(a + b)$ sú rovnaké.

Úloha 3. Nekonečnú postupnosť kladných celých čísel $a_1, a_2, \ldots$ nazveme *huňatá*, ak

(1) a_1 je druhá mocnina celého čísla,

(2) pre každé celé $n \geq 2$ platí, že a_n je najmenšie kladné celé číslo také, že

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

je druhá mocnina celého čísla.

Dokážte, že pre každú huňatú postupnosť $a_1, a_2, \ldots$ existuje kladné celé číslo k také, že pre všetky celé čísla $n \geq k$ platí $a_n = a_k$.

Language: Slovak

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Každá úloha je hodnotená najviac 7 bodmi.

Aby sme túto súťaž spravili spravodlivou a príjemnou pre všetkých, prosíme, nezmieňujte alebo neposkytujte referencie o úlohách na internete alebo sociálnych médiach do soboty 9. apríla, 23:59.