



petak 8.4.2022.

Zadatak 1. Neka je ABC oštrogli trougao u kome je $BC < AB$ i $BC < CA$. Neka tačka P pripada duži AB i tačka Q pripada duži AC tako da je $P \neq B$, $Q \neq C$ i $BQ = BC = CP$. Neka je T centar opisane kružnice oko trougla APQ , H ortocentar trougla ABC , i S tačka preseka pravih BQ i CP . Dokazati da su tačke T , H i S kolinearne.

Zadatak 2. Neka je $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ skup prirodnih brojeva. Naći sve funkcije $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takve da za sve prirodne brojeve a i b važe sledeća dva uslova:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, i

(2) među brojevima $f(a)$, $f(b)$ i $f(a + b)$ bar dva su jednaka.

Zadatak 3. Beskonačan niz prirodnih brojeva a_1, a_2, \dots je *dobar*, ako

(1) je a_1 potpun kvadrat, i

(2) za svaki prirodan broj $n \geq 2$, a_n je najmanji prirodan broj takav da je broj

$$na_1 + (n - 1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$$

potpun kvadrat.

Dokazati da za svaki dobar niz a_1, a_2, \dots postoji k takav da je $a_n = a_k$ za sve prirodne brojeve $n \geq k$.