Пятница, 8 апреля 2022 г.

Задача 1. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $BC < AB$ и $BC < CA$. Точка P лежит на отрезке AB, а точка Q лежит на отрезке AC так, что $P \neq B$, $Q \neq C$ и $BQ = BC = CP$. Точка T — центр описанной окружности треугольника APQ, точка H — ортоцентр треугольника ABC, а S — точка пересечения прямых BQ и CP. Докажите, что точки T, H и S лежат на одной прямой.

Задача 2. Как обычно, через $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ обозначим множество всех натуральных чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что для любых натуральных чисел a и b выполняются следующие два условия:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$,

(2) хотя бы два из чисел $f(a)$, $f(b)$ и $f(a+b)$ равны друг другу.

Задача 3. Назовём бесконечную последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ *хорошей*, если выполнены следующие два условия:

(1) a_1 — полный квадрат,

(2) для любого целого числа $n \geq 2$, число a_n — наименьшее натуральное число такое, что сумма

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

является полным квадратом.

Докажите, что для любой хорошей последовательности $a_1, a_2, \ldots$ существует натуральное число k такое, что $a_n = a_k$ для всех целых чисел $n \geq k$.

Language: Русский

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

Чтобы олимпиада была честной и доставила всем удовольствие, пожалуйста, не упоминайте и не пишите ничего про задачи в интернете и любых социальных сетях до 01:00 ночи 10 апреля по минскому времени.