Vineri, 8 aprilie 2022

Problema 1. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care $BC < AB$ şi $BC < CA$. Fie punctul P pe segmentul AB şi punctul Q pe segmentul AC astfel încât $P \neq B$, $Q \neq C$ şi $BQ = BC = CP$. Fie T centrul cercului circumscris triunghiului APQ, H ortocentrul triunghiului ABC şi S punctul de intersecţie a dreptelor BQ şi CP. Demonstraţi că T, H şi S sunt coliniare.

Problema 2. Fie $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ mulţimea numerelor întregi pozitive. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ astfel încât, pentru orice întregi pozitivi a şi b, să fie îndeplinite simultan condiţiile:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, şi

(2) cel puţin două dintre numerele $f(a)$, $f(b)$ şi $f(a+b)$ sunt egale.

Problema 3. Un şir infinit de numere întregi pozitive $a_1, a_2, \ldots$ va fi numit *bun* dacă

(1) a_1 este pătrat perfect, şi

(2) pentru orice număr întreg $n \geq 2$, a_n este cel mai mic întreg pozitiv pentru care numărul

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

este pătrat perfect.

Demonstraţi că, pentru orice şir bun $a_1, a_2, \ldots$, există un întreg pozitiv k astfel încât $a_n = a_k$, oricare ar fi numărul întreg $n \geq k$.

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte

Pentru ca acest concurs să fie corect şi plăcut pentru toţi, vă rugăm să nu vă referiţi la probleme pe Internet sau pe reţelele de socializare până duminică, 10 aprilie, ora 1:00 (ora României).