Sexta, 9 de abril de 2022

Problema 1. Seja ABC um triângulo acutângulo onde $BC < AB$ e $BC < CA$. O ponto P pertence ao segmento AB e o ponto Q pertence à AC de modo que $P \neq B$, $Q \neq C$ e $BQ = BC = CP$. Sejam T o circuncentro do triângulo APQ, H o ortocentro do triângulo ABC, e S a interseção dos segmentos BQ e CP. Mostre que T, H e S são colineares.

Problema 2. Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto de todos os inteiros positivos. Encontre todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tais que, para quaisquer inteiros positivos a e b, as duas condições a seguir são satisfeitas:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$;

(2) pelo menos dois dos números $f(a)$, $f(b)$ e $f(a+b)$ são iguais.

Problema 3. Uma sequência infinita de inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots$ é dita *húngara* se

(1) a_1 é um quadrado perfeito;

(2) para todo inteiro $n \geq 2$, a_n é o menor inteiro positivo tal que

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

é um quadrado perfeito.

Mostre que para qualquer sequência húngara $a_1, a_2, \ldots$, existe um inteiro positivo k tal que $a_n = a_k$ para todo inteiro $n \geq k$.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Para fazer dessa uma competição justa e agradável para todas, por favor não mencione ou faça referência aos problemas na internet ou nas redes sociais até o sábado, 9 de abril, 22:00 UTC (19:00 horário de Brasília).