Language: **Polish**

Day: **1**

EGMO Hungary | 2022 Eger

European Girls' Mathematical Olympiad

Piątek, 8 kwietnia 2022 r.

Zadanie 1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $BC < AB$ oraz $BC < CA$. Punkt P leży na odcinku AB, a punkt Q leży na odcinku AC, przy czym $P \neq B$, $Q \neq C$ oraz $BQ = BC = CP$. Niech T oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie APQ, H ortocentrum trójkąta ABC, S natomiast punkt przecięcia prostych BQ i CP. Wykazać, że punkty T, H i S są współliniowe.

Zadanie 2. Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ oznacza zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takie że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b zachodzą poniższe dwa warunki:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$ oraz

(2) co najmniej dwie spośród liczb $f(a)$, $f(b)$, $f(a+b)$ są równe.

Zadanie 3. Nieskończony ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots$ nazwiemy *dobrym*, jeśli

(1) a_1 jest kwadratem liczby całkowitej oraz

(2) dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$, a_n jest najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą taką, że liczba

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Udowodnić, że dla dowolnego dobrego ciągu $a_1, a_2, \ldots$ istnieje dodatnia liczba całkowita k, taka że $a_n = a_k$ dla każdego $n \geq k$.

Language: Polish

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można uzyskać 7 punktów

Aby zawody były sprawiedliwe i przyjemne dla wszystkich uczestniczek, nie zamieszczaj informacji o tych zadaniach w internecie ani mediach społecznościowych do północy z soboty 9 kwietnia na niedzielę 10 kwietnia.