Language: **Norwegian**

Day: **1**

Fredag 8. april 2022

Oppgave 1. La ABC være en spissvinklet trekant der $BC < AB$ og $BC < CA$. La P være punktet på linjestykket AB og Q punktet på linjestykket AC slik at $P \neq B$, $Q \neq C$ og $BQ = BC = CP$. La T være omsenteret til trekanten APQ, H ortosenteret til trekanten ABC, og S skjæringspunktet til linjene BQ og CP. Vis at T, H og S er kollineære.

Oppgave 2. La $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ være mengden av alle positive heltall. Finn alle funksjoner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ slik at for alle positive heltall a og b gjelder følgende to betingelser:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, og

(2) minst to av tallene $f(a)$, $f(b)$ og $f(a+b)$ er like.

Oppgave 3. En uendelig følge $a_1, a_2, \ldots$ av positive heltall kalles *god* dersom

(1) a_1 er et kvadrattall, og

(2) for alle heltall $n \geq 2$ er a_n det minste postive heltallet slik at

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

er et kvadrattall.

Vis at det for enhver god følge $a_1, a_2, \ldots$ eksisterer et positivt heltall k slik at $a_n = a_k$ for alle heltall $n \geq k$.

Language: Norwegian

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

For å gjøre dette til en rettferdig konkurranse for alle ber vi om at du ikke nevner eller snakker om oppgavene på internett eller sosiale medier før lørdag 9. april kl. 22:00 UTC (søndag kl. 00:00 norsk tid).