



2022 оны 4 сарын 8 (Баасан)

Бодлого 1. $BC < AB$ ба $BC < CA$ байх хурц өнцөгт ABC гурвалжин өгөгдөв. P цэг AB хэрчим дээр, Q цэг AC хэрчим дээр байх бөгөөд $P \neq B$, $Q \neq C$ ба $BQ = BC = CP$ байв. APQ гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг T , ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэгийг H гээд BQ ба CP шулуунуудын огтлолцлын цэгийг S гэе. T , H , S цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

Бодлого 2. Бүх эерэг бүхэл тооны олонлогийг $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ гэж тэмдэглэе. Дурын эерэг бүхэл a, b тоонуудын хувьд дараах хоёр нөхцөл биелдэг байх бүх $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийг ол.

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$ ба

(2) $f(a), f(b), f(a+b)$ тоонуудын ядаж хоёр нь тэнцүү.

Бодлого 3. Эерэг бүхэл тоон a_1, a_2, \dots төгсгөлгүй дарааллыг дараах нөхцөлүүдийг хангадаг бол сайн гэе.

(1) a_1 бүтэн квадрат ба

(2) дурын $n \geq 2$ хувьд a_n нь

$$na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$$

тоо бүтэн квадрат байдаг хамгийн бага эерэг бүхэл тоо.

Дурын a_1, a_2, \dots сайн дарааллын хувьд ямар нэг эерэг бүхэл k тоо олддоод бүх $n \geq k$ хувьд $a_n = a_k$ байна гэж батал.