Петок, Април 8, 2022

Задача 1. Нека ABC е остроаголен триаголник за чии должини на страни важи $BC < AB$ и $BC < CA$. Дадени се и точките P на отсечката AB и Q на отсечката AC, при што $P \neq B$, $Q \neq C$ и $BQ = BC = CP$. Нека T е центарот на опишаната кружница околу триаголникот APQ, H е ортоцентарот на триаголникот ABC и S е пресекот на правите BQ и CP. Докажи дека точките T, H и S се колинеарни.

Задача 2. Множеството $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ е множество на природните броеви. Одреди ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што, за било кои два природни броја a и b важат следниве два услови:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$ и

(2) најмалку два од броевите $f(a)$, $f(b)$ и $f(a+b)$ се еднакви.

Задача 3. Бесконечна низа од природни броеви $a_1, a_2, \ldots$ се нарекува *добра* ако

(1) a_1 е полн квадрат и

(2) за секој природен број $n \geq 2$, a_n е најмалиот природен број за кој што

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

е полн квадрат.

Докажи дека за секоја добра низа $a_1, a_2, \ldots$, постои природен број k и притоа важи $a_n = a_k$ за сите природни броеви $n \geq k$.

Време: 4 часа и 30 минути
Секоја задача носи 7 поени

За натпреварот да биде фер и вреден за паметење за сите учесници, Ве молиме не зборувајте и не се повикувајте на задачите на интернет ниту пак на социјалните мрежи, заклучно со сабота 9 April, 22:00 UTC (00:00 (недела) по централно европско време (CET)).