EGMO 2022 Hungary Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: **Lithuanian**

Day: **1**

2022 m. balandžio 8 d., penktadienis

1 uždavinys. Duotas smailusis trikampis ABC, kuriame $BC < AB$ ir $BC < CA$. Atkarpoje AB pažymėtas toks taškas P, o atkarpoje AC – toks taškas Q, kad $P \neq B$, $Q \neq C$ ir $BQ = BC = CP$. Apie trikampį APQ apibrėžtas apskritimas su centru T, trikampio ABC aukštinės kertasi taške H, o tiesės BQ ir CP kertasi taške S. Įrodykite, kad taškai T, H ir S yra vienoje tiesėje.

2 uždavinys. Visų natūraliųjų skaičių aibė žymima $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Nustatykite visas funkcijas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kurioms šios dvi sąlygos galioja su visais natūraliaisiais a ir b:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, ir

(2) mažiausiai du iš trijų skaičių $f(a)$, $f(b)$, $f(a + b)$ yra lygūs.

3 uždavinys. Begalinę natūraliųjų skaičių seką $a_1, a_2, \ldots$ vadinsime *šaunia*, jei

(1) a_1 yra sveikojo skaičiaus kvadratas ir

(2) kiekvienam natūraliajam $n \geq 2$ skaičius a_n yra toks mažiausias natūralusis skaičius, kad

$$na_1 + (n - 1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

Įrodykite, kad kiekvienai šauniai sekai $a_1, a_2, \ldots$ egzistuoja toks natūralusis skaičius k, kad $a_n = a_k$ visiems natūraliesiems $n \geq k$.

Language: Lithuanian

Darbo trukmė: 4 val. 30 min.
Kiekvieno uždavinio vertė yra 7 taškai

Kad varžybos būtų garbingos ir malonios visiems, prašome neminėti uždavinių ir nesiremti jais internete bei socialinėje žiniasklaidoje iki balandžio 10 d. (sekmadienio) 00:00.