Piektdiena, 2022. gada 8. aprīlis

1.uzdevums. Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kurā $BC < AB$ un $BC < CA$. Punkts P ir atlikts uz nogriežņa AB, un punkts Q ir atlikts uz nogriežņa AC tā, ka $P \neq B$, $Q \neq C$ un $BQ = BC = CP$. Ap trijstūri APQ ir apvilkta riņķa līnija ar centru punktā T, trijstūra ABC ortocentrs ir H, un taisnes BQ un CP krustojas punktā S. Pierādīt, ka T, H un S ir kolineāri.

2.uzdevums. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ir naturālu skaitļu kopa. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kas apmierina sekojošus nosacījumus visiem naturāliem a un b:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$,

(2) vismaz divas vērtības no $f(a)$, $f(b)$ un $f(a + b)$ ir vienādas.

3.uzdevums. Bezgalīgu naturālus skaitļu virkni $a_1, a_2, \ldots$ sauc par *labu*, ja

(1) a_1 ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts,

(2) a_n ir mazākais iespējamais naturālais skaitlis, kam izpildās, ka

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts katram naturālam skaitlim $n \geq 2$.

Pierādīt, ka katrai labai virknei $a_1, a_2, \ldots$ eksistē tāds naturāls skaitlis k, ka $a_n = a_k$ visiem naturāliem skaitļiem $n \geq k$.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 7 punktiem.

Lai nodrošinātu godīgas un patīkamas sacensības, lūdzu neapspriest un nepieminēt uzdevumus internetā vai sociālajos tīklos līdz svētdienas, 10. aprīļa, plkst. 00:00.