



2022年4月8日(金曜日)

問題 1. $BC < AB$, $BC < CA$ なる鋭角三角形 ABC がある. P , Q はそれぞれ線分 AB , AC 上の点であり, $P \neq B$, $Q \neq C$, $BQ = BC = CP$ をみたしている. T を三角形 APQ の外心, H を三角形 ABC の垂心とし, S を直線 BQ と CP の交点とする. このとき 3 点 T , H , S は同一直線上にあることを示せ.

問題 2. 正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって, 任意の正の整数 a, b に対して以下の 2 つの条件をともにみたすものをすべて求めよ.

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$

(2) $f(a)$, $f(b)$, $f(a+b)$ のうち少なくとも 2 つは同じ数となる.

問題 3. 正の整数からなる数列 a_1, a_2, \dots が良いとは, 以下の 2 つの条件をともにみたすことをいう.

(1) a_1 が平方数

(2) 2 以上の任意の整数 n について, a_n は

$$na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$$

が平方数となる最小の正の整数である.

任意の良い数列 a_1, a_2, \dots についてある正の整数 k が存在し, k 以上の任意の整数 n について $a_n = a_k$ が成り立つことを示せ.