Language: **Italian**

Day: **1**

Venerdì 8 Aprile 2022

Problema 1. Sia ABC un triangolo acutangolo in cui $BC < AB$ e $BC < CA$. Sia P un punto sul segmento AB e Q un punto sul segmento AC tali che $P \neq B$, $Q \neq C$ e $BQ = BC = CP$. Sia T il circocentro del triangolo APQ, H l'ortocentro del triangolo ABC e S il punto d'intersezione delle rette BQ e CP. Dimostrare che i punti T, H e S sono allineati.

Problema 2. Sia $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ l'insieme di tutti gli interi positivi. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che per tutti gli interi positivi a e b valgono le seguenti due condizioni:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$ e

(2) almeno due fra i numeri $f(a)$, $f(b)$ e $f(a+b)$ sono uguali.

Problema 3. Una successione infinita $a_1, a_2, \ldots$ di interi positivi è detta *buona* se

(1) a_1 è un quadrato perfetto e

(2) per ogni intero $n \geq 2$, a_n è il più piccolo intero positivo tale che

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

è un quadrato perfetto.

Dimostrare che per ogni successione buona $a_1, a_2, \ldots$ esiste un intero positivo k tale che $a_n = a_k$ per tutti gli interi $n \geq k$.

Language: Italiano

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Per rendere la gara equa e divertente per tutte, non parlare dei problemi su internet o sui social media fino a Domenica 10 Aprile alle 00:00.