Language: **Hungarian**

Day: **1**

2022. április 8. péntek

Feladat 1. Legyen ABC egy olyan hegyesszögű háromszög, ahol $BC < AB$ és $BC < CA$. A P pont az AB szakaszon, a Q pont az AC szakaszon helyezkedik el úgy, hogy $P \neq B$, $Q \neq C$ és $BQ = BC = CP$. Legyen T az APQ háromszög körülírt körének középpontja, H az ABC háromszög magasságpontja, valamint S a BQ és CP egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy a T, H és S pontok egy egyenesre esnek.

Feladat 2. Jelölje $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a pozitív egész számok halmazát. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvényt, amire tetszőleges pozitív egész a, b számokra az alábbi két feltétel mindegyike teljesül:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, és

(2) az $f(a)$, $f(b)$ és $f(a + b)$ számok közül legalább kettő egyenlő.

Feladat 3. Egy pozitív egészekből álló, végtelen $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot *kockásfülű*nek nevezünk, ha

(1) a_1 teljes négyzet, és

(2) minden $n \geq 2$ egészre az a_n a legkisebb pozitív egész szám, amire

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

teljes négyzet.

Bizonyítsuk be, hogy minden kockásfülű $a_1, a_2, \ldots$ sorozathoz létezik olyan pozitív egész k szám, amire $a_n = a_k$ teljesül minden $n \geq k$ egész esetén.

Language: Hungarian

Idő: 4 óra 30 perc
Minden feladat 7 pontot ér

Annak érdekében, hogy a verseny mindenki számára igazságos és élvezetes legyen, kérjük, hogy ne említsétek vagy utaljatok a feladatokra az interneten, vagy a szociális hálón április 9. szombat 22:00 UTC-ig (magyar idő szerint éjfélig).