Language: **Hebrew**

Day: **1**

יום שישי, 8 באפריל, 2022

שאלה 1. יהא ABC משולש חד-זוויות בו מתקיים $AB > BC$ וגם $CA > BC$. תהיינה P נקודה על הקטע AB ו-Q נקודה על הקטע AC המקיימות $P \neq B$, $Q \neq C$ וכן $BQ = BC = CP$. נסמן ב-T את מרכז המעגל החוסם של המשולש APQ, ב-H את מפגש הגבהים של המשולש ABC, וב-S את נקודת החיתוך של הישרים BQ ו-CP. הוכיחי כי הנקודות T, H ו-S נמצאות על ישר אחד.

שאלה 2. תהא $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ קבוצת המספרים השלמים החיוביים. מצאי את כל הפונקציות $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ עבורן שני התנאים הבאים מתקיימים לכל a, b שלמים חיוביים:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, וגם

(2) לפחות שניים מהמספרים $f(a), f(b), f(a+b)$ שווים זה לזה.

שאלה 3. נאמר שסדרה אינסופית של שלמים חיוביים $a_1, a_2, \dots$ היא **טובה** אם

(1) a_1 הוא ריבוע שלם, וגם

(2) לכל $n \geq 2$ שלם, a_n הוא השלם החיובי הקטן ביותר עבורו

$$na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$$

הוא ריבוע שלם.

הוכיחי כי לכל סדרה טובה $a_1, a_2, \dots$ קיים שלם חיובי k עבורו $a_n = a_k$ לכל $n \geq k$.

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

על מנת שהתחרות תהיה הוגנת ומהנה עבור כולן, אנא אל תצייני או תתייחסי לשאלות באינטרנט או ברשתות החברתיות עד ליום ראשון ה-10 באפריל, בשעה 00:00 (שעון הונגריה).