EGMO Hungary 2022 Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: **Greek**

Day: **1**

Παρασκευή, 8 Απριλίου, 2022

Πρόβλημα 1. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC τέτοιο, ώστε $BC < AB$ και $BC < CA$. Έστω σημείο P στο ευθύγραμμο τμήμα AB και σημείο Q στο ευθύγραμμο τμήμα AC τέτοια, ώστε $P \neq B$, $Q \neq C$ και $BQ = BC = CP$. Έστω T το περίκεντρο του τριγώνου APQ, H το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC και S το σημείο τομής των ευθειών BQ και CP. Να αποδείξετε ότι τα σημεία T, H και S είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 2. Έστω $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ το σύνολο των θετικών ακεραίων. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοιες, ώστε για οποιουσδήποτε θετικούς ακεραίους a και b, ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, και

(2) τουλάχιστον δύο από τους αριθμούς $f(a)$, $f(b)$ και $f(a+b)$ είναι ίσοι.

Πρόβλημα 3. Μια άπειρη ακολουθία θετικών ακεραίων $a_1, a_2, \ldots$ ονομάζεται *καλή* αν

(1) το a_1 είναι τέλειο τετράγωνο, και

(2) για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, το a_n είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος τέτοιος, ώστε ο

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

να είναι τέλειο τετράγωνο.

Να αποδείξετε ότι για κάθε καλή ακολουθία $a_1, a_2, \ldots$, υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος, ώστε $a_n = a_k$ για όλους τους ακεραίους $n \geq k$.

Language: Greek

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Για να καταστεί αυτός ο διαγωνισμός δίκαιος και ευχάριστος για όλους, παρακαλούμε μην συζητήσετε ή αναφέρετε τα προβλήματα στο διαδίκτυο ή σε κοινωνικά δίκτυα μέχρι την Κυριακή 10 Απριλίου, 01:00.