Freitag, 8. April 2022

Aufgabe 1. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck, sodass $BC < AB$ und $BC < CA$. Sei P ein Punkt auf der Strecke AB und Q ein Punkt auf der Strecke AC, sodass $P \neq B$, $Q \neq C$ und $BQ = BC = CP$. Sei T der Umkreismittelpunkt des Dreiecks APQ, H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, und S der Schnittpunkt der Geraden BQ und CP. Zeige, dass T, H und S auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle positiven ganzen Zahlen a und b die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, und

(2) mindestens zwei der Zahlen $f(a)$, $f(b)$ und $f(a + b)$ sind gleich.

Aufgabe 3. Eine unendliche Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ positiver ganzer Zahlen heißt (heisst) *gut*, falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) a_1 ist eine Quadratzahl, und

(2) für alle ganzen Zahlen $n \geq 2$ ist a_n die kleinste positive ganze Zahl, sodass

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

eine Quadratzahl ist.

Zeige, dass für alle guten Folgen $(a_1, a_2, \ldots)$ eine positive ganze Zahl k existiert, sodass $a_n = a_k$ für alle ganzen Zahlen $n \geq k$.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert

Um einen fairen und unterhaltsamen Wettbewerb für alle zu gewährleisten, dürfen diese Aufgaben nicht vor Sonntag, 10. April 0:00 Uhr mitteleuropäischer Sommerzeit im Internet oder in sozialen Netzwerken erwähnt oder diskutiert werden.