EGMO Hungary 2022 Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: **French**

Day: **1**

Vendredi 8 avril 2022

Problème 1. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et tel que $BC < AB$ et $BC < CA$. Soient P un point sur le segment AB et Q un point sur le segment AC tels que $P \neq B$, $Q \neq C$ et $BQ = BC = PC$. Soient T le centre du cercle circonscrit au triangle APQ, H l'orthocentre du triangle ABC, et S le point d'intersection des droites BQ et CP. Démontrer que T, H et S sont colinéaires.

Problème 2. Soit $\mathbb{N}^\star = \{1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telles que, pour toute paire d'entiers strictement positifs a et b les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$, et

(2) au moins deux des nombres $f(a)$, $f(b)$ et $f(a+b)$ sont égaux.

Problème 3. Une suite infinie $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers strictement positifs est dite *sympa* si

(1) a_1 est un carré parfait, et

(2) pour tout entier $n \geq 2$, a_n est le plus petit entier strictement positif tel que

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

est un carré parfait.

Démontrer que pour chaque suite sympa $a_1, a_2, \ldots$, il existe un entier strictement positif k tel que $a_n = a_k$ pour tout entier $n \geq k$.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Pour que cette compétition reste juste et plaisante pour chacune, évitez de publier ou de discuter des problèmes sur internet ou sur les réseaux sociaux avant le samedi 9 avril 22h UTC.