



Perjantai, 8.4.2022

Tehtävä 1. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa on voimassa $BC < AB$ ja $BC < CA$. Olkoon P sellainen piste janalla AB ja Q sellainen piste janalla AC , että $P \neq B$, $Q \neq C$ ja $BQ = BC = CP$. Olkoot T kolmion APQ ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, H kolmion ABC ortokeskus ja S suorien BQ ja CP leikkauspiste. Osoita, että pisteet T , H ja S ovat samalla suoralla.

Tehtävä 2. Olkoon $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ kaikkien positiivisten kokonaislukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, joilla seuraavat kaksi ehtoa pätevät kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b :

- (1) $f(ab) = f(a)f(b)$ ja
- (2) ainakin kaksi luvuista $f(a)$, $f(b)$ ja $f(a + b)$ ovat yhtä suuret.

Tehtävä 3. Kutsutaan ääretöntä positiivisten kokonaislukujen jonoa a_1, a_2, \dots *hyväksi*, jos

- (1) a_1 on neliöluku ja
- (2) kullakin kokonaisluvuilla $n \geq 2$, a_n on pienin positiivinen kokonaisluku, jolla

$$na_1 + (n - 1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$$

on neliöluku.

Osoita, että kutakin hyvää jonoa a_1, a_2, \dots kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku k , että $a_n = a_k$ kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq k$.