Language: **Dutch**

Day: **1**

*Vrijdag 8 april 2022*

**Opgave 1.** Laat $\triangle ABC$ een scherphoekige driehoek zijn, zodat $|BC| < |AB|$ en $|BC| < |CA|$. De punten $P$ en $Q$ liggen respectievelijk op lijnstukken $AB$ en $AC$, zodat $P \neq B$, $Q \neq C$ en $|BQ| = |BC| = |CP|$. Laat $T$ het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle APQ$ zijn, $H$ het hoogtepunt van $\triangle ABC$ en $S$ het snijpunt van de lijnen (rechten) $BQ$ en $CP$. Bewijs dat $T$, $H$ en $S$ op één lijn liggen.

**Opgave 2.** Laat $\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de verzameling zijn van alle (strikt) positieve gehele getallen. Bepaal alle functies $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ zodat voor alle (strikt) positieve gehele getallen $a$ en $b$ aan de volgende twee voorwaarden wordt voldaan:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, en

(2) van de getallen $f(a)$, $f(b)$ en $f(a+b)$ zijn er tenminste twee hetzelfde.

**Opgave 3.** Een oneindig rijtje van (strikt) positieve gehele getallen $a_1, a_2, \ldots$ wordt *mooi* genoemd als aan de volgende twee voorwaarden wordt voldaan:

(1) $a_1$ is een kwadraat van een geheel getal, en

(2) voor elk geheel getal $n \geq 2$ is $a_n$ het kleinste (strikt) positieve gehele getal zodat

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

een kwadraat is van een geheel getal.

Bewijs dat voor elk *mooi* rijtje $a_1, a_2, \ldots$, er een (strikt) positief geheel getal $k$ bestaat zodat $a_n = a_k$ voor alle gehele getallen $n \geq k$.

Language: Dutch

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard

**Om de wedstrijd voor iedereen eerlijk en leuk te houden, is het verboden om op sociale media of op het internet de opgaven te publiceren of om daar naar de opgaven te verwijzen tot en met zaterdag 9 april 23:59 (Nederlandse en Hongaarse tijd).**