Language: **Danish**

Day: **1**

Fredag d. 8. april 2022

Opgave 1. Lad ABC være en spidsvinklet trekant hvor $BC < AB$ og $BC < CA$. Lad P være punktet på linjestykket AB og Q punktet på linjestykket AC så $P \neq B$, $Q \neq C$ og $BQ = BC = CP$. Lad T være centrum for den omskrevne cirkel til APQ, H højdernes skæringspunkt i trekant ABC og S skæringspunktet mellem linjerne BQ og CP. Vis at T, H og S ligger på linje.

Opgave 2. Lad $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ være mængden af positive hele tal. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ så der for alle positive hele tal a og b gælder følgende to betingelser:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, og

(2) mindst to af tallene $f(a)$, $f(b)$ og $f(a + b)$ er ens.

Opgave 3. En uendelig følge $a_1, a_2, \ldots$ af positive hele tal kaldes *god* hvis

(1) a_1 er et kvadrattal, og

(2) for alle hele tal $n \geq 2$ er a_n det mindste positive hele tal så

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

er et kvadrattal.

Vis at der for enhver god følge $a_1, a_2, \ldots$ eksisterer et positivt helt tal k så $a_n = a_k$ for alle hele tal $n \geq k$.

Varighed: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave er 7 point værd

For at sikre en fair konkurrence for alle må du ikke omtale eller henvise til opgaverne på internettet eller sociale medier før lørdag d. 9. april klokken 22:00 UTC (søndag klokken 00:00 dansk tid).