Language: **Czech**

Day: **1**

pátek 8. dubna 2022

Úloha 1. Označme ABC ostroúhlý trojúhelník, ve kterém $|BC| < |AB|$ a $|BC| < |CA|$. Bod P leží na úsečce AB a bod Q leží na úsečce AC tak, že $P \neq B$, $Q \neq C$ a $|BQ| = |BC| = |CP|$. Označme T střed kružnice opsané trojúhelníku APQ, H ortocentrum trojúhelníku ABC a S průsečík přímek BQ a CP. Dokažte, že body T, H, S leží na přímce.

Úloha 2. Symbolem $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ značíme množinu kladných celých čísel. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná kladná celá čísla a a b platí následující dvě podmínky:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$ a

(2) alespoň dvě z čísel $f(a)$, $f(b)$, $f(a+b)$ jsou si rovna.

Úloha 3. Nekonečnou posloupnost kladných celých čísel $a_1, a_2, \ldots$ nazveme *dobrou*, pokud

(1) a_1 je druhou mocninou celého čísla a

(2) pro každé celé číslo $n \geq 2$ je a_n nejmenší kladné celé číslo takové, že

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

je druhou mocninou celého čísla.

Dokažte, že pro každou dobrou posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ existuje kladné celé číslo k takové, že pro všechna celá čísla $n \geq k$ platí $a_n = a_k$.

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat až 7 bodů

Aby soutěž byla byla regulérní a příjemná pro všechny soutěžící, nezmiňujte prosím úlohy a nediskutujte o nich na internetu a sociálních sítích do soboty 9. dubna, 23:59 hodin.