Petak, 8. travnja, 2022.

Zadatak 1. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem vrijedi $BC < AB$ i $BC < CA$. Točka P leži na dužini AB i točka Q leži na dužini AC tako da je $P \neq B$, $Q \neq C$ i $BQ = BC = CP$. Neka je T središte kružnice opisane trokutu APQ, H ortocentar trokuta ABC, i S točka presjeka pravaca BQ i CP. Dokaži da su točke T, H i S kolinearne.

Zadatak 2. Neka je $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ skup svih prirodnih brojeva. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da su za sve prirodne brojeve a i b zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, i

(2) barem dva broja među brojevima $f(a)$, $f(b)$ i $f(a+b)$ su jednaki.

Zadatak 3. Za beskonačan niz prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots$ kažemo da je *dobar* ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

(1) a_1 je kvadrat cijelog broja, i

(2) za svaki prirodan broj $n \geq 2$, a_n je najmanji prirodan broj takav da je

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

kvadrat cijelog broja.

Dokaži da za svaki dobar niz $a_1, a_2, \ldots$ postoji prirodan broj k takav da vrijedi $a_n = a_k$ za svaki prirodan broj $n \geq k$.

Da bi natjecanje bilo pošteno, molimo vas da ne pričate o zadacima i ne spominjete ih na internetu ili bilo kakvim društvenim medijima do subote, 9. travnja u 23:59.