Language: **Bulgarian**

Day: **1**

Петък, 8 Април, 2022

Задача 1. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, за който $BC < AB$ и $BC < CA$. Нека точка P е от страната AB и точка Q е от страната AC, такива че $P \neq B, Q \neq C$ и $BQ = BC = CP$. Нека T е центърът на описаната около триъгълник APQ окръжност, H е ортоцентърът на триъгълник ABC, а точка S е пресечната точка на правите BQ и CP. Докажете, че T, H и S лежат на една права.

Задача 2. Нека $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$ е множеството от всички естествени числа. Намерете всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такива че за всеки две естествени числа a и b, следните две условия са изпълнени:

1. $f(ab) = f(a)f(b)$
2. поне две от числата $f(a), f(b)$ и $f(a + b)$ са равни.

Задача 3. Безкрайна редица от естествени числа $a_1, a_2, \ldots$ се нарича *добра*, ако:

1. a_1 е точен квадрат, и
2. за всяко естествено число $n \geq 2$, a_n е най-малкото естествено число, такова че :

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

   е точен квадрат.

Докажете, че за всяка добра редица $a_1, a_2, \ldots$ съществува естествено число k, такова че $a_n = a_k$ за всяко естествено число $n \geq k$.

Language: Български

Време: 4 часа and 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

За да бъде състезанието честно и приятно преживяване за всички, моля не споделяйте задачите или части от тях в Интернет и в социалните мрежи до събота, 9 април, 23:59.