EGMO 2022
Hungary | Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: Arabic (Syrian)

Day: 1

الجمعة 8 نيسان 2022

المسألة 1. ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا فيه $BC < AB$ و $BC < CA$. لتكن P نقطة من القطعة المستقيمة AB و Q نقطة من القطعة المستقيمة AC، بحيث $P \neq B$ و $Q \neq C$ و $BQ = BC = CP$. لتكن النقطة T مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث APQ، و H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC، و S نقطة تقاطع المستقيمين BQ و CP. أثبتي أنّ النقاط T و H و S تقع على استقامة واحدة.

المسألة 2. لتكن $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة تماماً. أوجِدي جميع التوابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ التي تحقّق مهما كان العددان الطبيعيان الموجبان تماماً a و b الشرطين الآتيين:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$،

(2) على الأقل اثنان من الأعداد $f(a)$ و $f(b)$ و $f(a+b)$ متساويان.

المسألة 3. نقول إنّ المتتالية اللانهائية من الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً $a_1, a_2, \ldots$ **جيّدة** إذا

(1) العدد a_1 مربّع كاملٌ، و

(2) أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$ كان a_n أصغر عدد طبيعي موجب تماماً يجعل

$$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$

مربعاً كاملاً.

أثبتي أنّه مهما كانت المتتالية الجيّدة $a_1, a_2, \ldots$، فيوجد عدد صحيح موجب تماماً k يحقق $a_n = a_k$ في حالة أي عدد صحيح n أكبر أو يساوي k.

Language: Arabic(Syrian)

المدة: أربع ساعات وثلاثون دقيقة
لكلّ مسألة سبع درجات.

بهدف جعل هذه المسابقة عادلة وممتعة للجميع، يرجى عدم ذكر المسائل أو الإشارة إليها على الانترنت ولا على وسائل التواصل الاجتماعي حتى يوم الأحد 10 نيسان الساعة 01 صباحاً بتوقيت دمشق.