Language: **Arabic**

Day: **1**

EGMO 2022 Hungary | Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

Friday, April 8, 2022

المسألة 1. ليكن ABC مثلثًا حاد الزوايا، فيه $BC < AB, BC < CA$. لتكن النقطة P تقع على القطعة المستقيمة AB، النقطة Q تقع على AC، بحيث $P \neq B, Q \neq C, BQ = BC = CP$. لتكن T المركز المحيط للمثلث APQ، H هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث ABC، S هي نقطة تقاطع المستقيمين BQ, CP. أثبت أن النقاط S, H, T تقع على استقامة واحدة.

المسألة 2. لتكن $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. أوجد كل الدوال $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ بحيث لكل عددين صحيحين موجبين a, b، تحقق الشرطين التاليين:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$.

(2) عددان على الأقل من الأعداد الثلاثة التالية $f(a), f(b), f(a+b)$ متساويان.

المسألة 3. يقال للمتتابعة الغير منتهية من الأعداد الصحيحة الموجبة $a_1, a_2, \dots$ أنها "جيدة" إذا كان:

(1) a_1 مربعًا كاملًا.

(2) لكل عدد صحيح $n \geq 2$ و a_n هو أصغر عدد صحيح موجب بحيث

$$na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$$

يكون مربعًا كاملًا.

أثبت أن لأي متتابعة جيدة $a_1, a_2, \dots$، يوجد عدد صحيح موجب k، بحيث $a_n = a_k$ لكل الأعداد الصحيحة $n \geq k$.

Language: Arabic

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points

لجعل هذه المسابقة عادلة وممتعة للجميع، يرجى عدم ذكر أو الإشارة إلى المسائل على الإنترنت أو على وسائل التواصل الاجتماعي حتى يوم السبت ٩ أبريل، الساعة ٢٢:٠٠ بالتوقيت العالمي المنسق (١٥:٠٠ بتوقيت المحيط الهادئ الصيفي، ٠٠:٠٠ (الأحد) التوقيت الصيفي لأوروبا الوسطى، ٠٨:٠٠ (الأحد) التوقيت الأسترالي الشرقي القياسي).