



E premte, 8 prill 2022

Detyra 1. Le të jetë ABC një trekëndësh këndngusht në të cilin $BC < AB$ dhe $BC < CA$. Le të jetë pika P në segmentin AB dhe pika Q në segmentin AC të tilla që $P \neq B$, $Q \neq C$ dhe $BQ = BC = CP$. Le të jetë T qendra e rrethit të jashtëshkruar në trekëndëshin APQ , H ortoqendra e trekëndëshit ABC , dhe S pika e prerjes së drejtëzave BQ dhe CP . Tregoni se T , H dhe S janë kolineare.

Detyra 2. Le të jetë $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bashkësia e numrave natyrorë. Caktoni të gjitha funksionet $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ të tilla që për çdo dy numra natyrorë a dhe b , vlejné të dy kushtet vijuese:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, dhe

(2) së paku dy nga numrat $f(a)$, $f(b)$ dhe $f(a + b)$ janë të barabartë.

Detyra 3. Vargu i pafundëm i numrave natyrorë a_1, a_2, \dots quhet *i mirë* nëse

(1) a_1 është katror i plotë, dhe

(2) për çdo numër të plotë $n \geq 2$, a_n është numri më i vogël natyror i tillë që

$$na_1 + (n - 1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$$

është katror i plotë.

Tregoni se për çdo varg të mirë a_1, a_2, \dots , ekziston numri natyror k i tillë që $a_n = a_k$ për të gjithë numrat e plotë $n \geq k$.

Gjuha: Shqip

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secila detyrë vlerësohet me 7 pikë

Për ta bërë këtë garë të drejtë dhe të këndshme për të gjithë, ju lutemi mos i përmendni ose referoni problemet në internet apo në rrjete sociale deri të shtunen më 9 prill, 22:00 UTC (15:00 Ora e Paqësorit, 00:00 (e diel) Ora verore e Evropës Qendrore, 08:00 (e diel) Ora standarde e Australisë Lindore).