



12 квітня 2021

Задача 4. Задано трикутник ABC з інцентром I . Нехай D – довільна точка на стороні BC . Пряма, що проходить через D і перпендикулярна до BI перетинає CI в точці E . Пряма, що проходить через D та перпендикулярна до CI перетинає BI в точці F . Доведіть, що точка симетрична до A відносно прямої EF належить прямій BC .

Задача 5. На площині зафіксовано точку O , яку ми назвемо "початком". Нехай P – множина з 2021 таких точок на площині, що

- (i) жодні три точки з P не лежать на одній прямій;
- (ii) жодні дві точки з P не лежать на одній прямій з початком.

Трикутник з вершинами в P назвемо товстим якщо O лежить строго всередині цього трикутника. Знайдіть максимальну кількість товстих трикутників.

Задача 6. Чи існує таке ціле невід'ємне число a для якого рівняння

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

має більше ніж мільйон різних розв'язків (m, n) , де m та n натуральні числа?

Вираз $\lfloor x \rfloor$ позначає цілу частину дійсного числа x . Зокрема, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ і $\lfloor 0 \rfloor = 0$.