



Lunes 12 de abril de 2021

**Problema 4.** Sea  $ABC$  un triángulo con incentro  $I$  y sea  $D$  un punto arbitrario en el lado  $BC$ . La recta que pasa por  $D$  y es perpendicular a  $BI$  interseca a  $CI$  en el punto  $E$ . La recta que pasa por  $D$  y es perpendicular a  $CI$  interseca a  $BI$  en el punto  $F$ . Demuestre que la reflexión de  $A$  sobre la recta  $EF$  está en la recta  $BC$ .

*Nota: la reflexión de un punto  $P$  sobre una recta  $r$  es el punto  $Q$  tal que  $r$  es la mediatriz del segmento  $PQ$ .*

**Problema 5.** Un plano tiene un punto especial  $O$  llamado origen. Sea  $P$  un conjunto de 2021 puntos en el plano que cumple las siguientes dos condiciones:

- (i) no hay tres puntos de  $P$  sobre una misma recta,
- (ii) no hay dos puntos de  $P$  sobre una misma recta que pasa por el origen.

Se dice que un triángulo con vértices en  $P$  es *gordo* si  $O$  es un punto interior de dicho triángulo. Encuentre la mayor cantidad de triángulos gordos que puede haber.

**Problema 6.** Determine si existe un entero no negativo  $a$  para el cual la ecuación

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

tiene más de un millón de soluciones diferentes  $(m, n)$  con  $m$  y  $n$  enteros positivos.

*Nota: la expresión  $\lfloor x \rfloor$  denota la parte entera (o piso) del número real  $x$ . Por ejemplo,  $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ ,  $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$ ,  $\lfloor 42 \rfloor = 42$  y  $\lfloor 0 \rfloor = 0$ .*