

Language: Spanish

Day: 2

Lunes 12 de abril de 2021

Problema 4. Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D un punto arbitrario en el lado BC. La recta que pasa por D y es perpendicular a BI interseca a CI en el punto E. La recta que pasa por D y es perpendicular a CI interseca a BI en el punto F. Demuestre que la reflexión de A sobre la recta EF está en la recta BC.

Nota: la reflexión de un punto P sobre una recta r es el punto Q tal que r es la mediatriz del segmento PQ.

Problema 5. Un plano tiene un punto especial O llamado origen. Sea P un conjunto de 2021 puntos en el plano que cumple las siguientes dos condiciones:

- (i) no hay tres puntos de P sobre una misma recta,
- (ii) no hay dos puntos de P sobre una misma recta que pasa por el origen.

Se dice que un triángulo con vértices en P es gordo si O es un punto interior de dicho triángulo. Encuentre la mayor cantidad de triángulos gordos que puede haber.

Problema 6. Determine si existe un entero no negativo a para el cual la ecuación

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

tiene más de un millón de soluciones diferentes (m, n) con m y n enteros positivos.

Nota: la expresión $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera (o piso) del número real x. Por ejemplo, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $|\pi| = |22/7| = 3$, |42| = 42 y |0| = 0.

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas 30 minutos

Cada problema tiene un valor de 7 puntos

Para que esta olimpiada sea justa y pueda ser disfrutada de la misma manera por todas, les rogamos no difundir estos problemas, ni en internet, ni en redes sociales, ni de ninguna otra forma, hasta el martes 13 de abril a las 12:00 UTC (6:00 de Costa Rica, 7:00 de CDMX, Perú y Ecuador, 8:00 de Bolivia y 14:00 de España).