



ponedeljek, 12. april 2021

Naloga 4. Naj bo I središče včrtane krožnice trikotnika ABC in naj bo D poljubna točka na stranici BC . Pravokotnica na BI skozi točko D seka CI v točki E . Pravokotnica na CI skozi točko D seka BI v točki F . Dokaži, da zrcalna slika točke A čez premico EF leži na premici BC .

Naloga 5. V ravnini leži posebna točka O , ki ji rečemo izhodišče. Naj bo P množica 2021 točk v ravnini, tako da

- (i) nobene tri točke iz P ne ležijo na isti premici in
- (ii) nobeni dve točki iz P ne ležita na isti premici skozi izhodišče.

Trikotnik z oglišči iz P je *debel*, če je O strogo znotraj tega trikotnika. Poišči največje možno število debelih trikotnikov.

Naloga 6. Ali obstaja nenegativno celo število a , za katero ima enačba

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

več kot en milijon različnih rešitev (m, n) , kjer sta m in n pozitivni celi števili?

Izraz $\lfloor x \rfloor$ predstavlja celi del realnega števila x . Na primer, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ ter $\lfloor 0 \rfloor = 0$.