Pondelok, 12. apríla 2021

Úloha 4. Máme daný trojuholník ABC so stredom kružnice vpísanej I. Nech D je bod ležiaci na jeho strane BC. Priamka prechádzajúca bodom D kolmá na priamku BI pretína priamku CI v bode E. Analogicky, priamka prechádzajúca bodom D kolmá na priamku CI pretína priamku BI v bode F. Dokážte, že obraz bodu A v osovej súmernosti podľa priamky EF leží na priamke BC.

Úloha 5. Je daná rovina so špeciálnym bodom O, ktorý nazveme *počiatok*. Nech P je množina 2021 bodov v tejto rovine takých, že

(i) žiadne tri body z P neležia na priamke;

(ii) žiadna dva body z P neležia na priamke prechádzajúcej počiatkom.

Trojuholník s vrcholmi z P nazveme *tučný* ak O leží vnútri neho. Nájdite maximálny počet tučných trojuholníkov.

Úloha 6. Rozhodnite, či existuje také nezáporné celé číslo a, že rovnica

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

má viac ako milión rôznych riešení (m, n), kde m a n sú kladné celé čísla.

Výrazom $\lfloor x \rfloor$ *označujeme celú časť reálneho čísla* x*, napríklad* $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Každá úloha je hodnotená najviac 7 bodmi.

Aby sme túto súťaž spravili spravodlivou a príjemnou pre všetkých, prosíme, nezmieňujte a neposkytujte referencie o úlohách na internete do utorka 13. apríla, 16:00.