EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Language: **Romanian**

Day: **2**

Luni, 12 aprilie 2021

Problema 4. Fie ABC un triunghi, I centrul cercului său înscris şi D un punct arbitrar pe latura BC. Perpendiculara din D pe BI intersectează dreapta CI în E. Perpendiculara din D pe CI intersectează dreapta BI în F. Demonstraţi că simetricul punctului A faţă de dreapta EF se află pe dreapta BC.

Problema 5. Fixăm în plan un punct O, numit origine. Fie P o mulţime de 2021 de puncte din plan, astfel încât

(i) nu există în P trei puncte care să fie situate pe o aceeaşi dreaptă şi

(ii) nu există în P două puncte care să fie situate pe o dreaptă care trece prin origine.

Un triunghi cu vârfurile în P este *gros* dacă O este strict în interiorul triunghiului. Determinaţi numărul maxim posibil de triunghiuri groase.

Problema 6. Există un număr întreg nenegativ a pentru care ecuaţia

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

are mai mult de un milion de soluţii (m, n), unde m şi n sunt numere întregi pozitive?

Notaţia $\lfloor x \rfloor$ *desemnează partea întreagă a numărului real* x. *Astfel,* $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ *şi* $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Language: Romanian

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte

Pentru ca acest concurs să fie corect şi plăcut pentru toţi, vă rugăm să nu vă referiţi la probleme pe Internet sau pe reţelele de socializare până marţi, 13 aprilie, ora 15:00 (ora României).