Segunda-feira, 12 de abril, 2021

Problema 4. Seja ABC um triângulo com incentro I e seja D um ponto qualquer no lado BC. A reta passando por D perpendicular a BI intersecta CI em E. A reta passando por D perpendicular a CI intersecta BI em F. Prove qua a reflexão de A pela reta EF está na reta BC.

Problema 5. Um plano tem um ponto especial O chamado de origem. Seja P um conjunto de 2021 pontos no plano tal que

(i) não existem três pontos em P que sejam colineares e

(ii) não existem dois pontos que estejam numa reta que passe pela origem.

Um triângulo com vértices em P é chamado de *gordo* se O está estritamente interno ao triângulo. Encontre o maior número de triângulos *gordos*.

Problema 6. Existe um inteiro não negativo a para o qual a equação

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

tem mais do que um milhão de soluções (m, n) diferentes com m e n inteiros positivos?

A expressão $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira (ou piso) de um número real x. Então $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ e $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Para tornar esta uma competição justa e agradável para todos, por favor não mencione ou se refira aos problemas na internet ou em redes sociais até terça-feira 13 de abril, 12:00 UTC (09:00 no horário de Brasília).