EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Language: **Polish**

Day: 2

poniedziałek, 12 kwietnia 2021 r.

Zadanie 4. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, a punkt D jest ustalonym punktem na boku BC. Prosta prostopadła do prostej BI przechodząca przez punkt D przecina prostą CI w punkcie E. Prosta prostopadła do prostej CI przechodząca przez punkt D przecina prostą BI w punkcie F. Udowodnić, że odbicie punktu A względem prostej EF leży na prostej BC.

Zadanie 5. Na płaszczyźnie zaznaczono specjalny punkt O, który nazwiemy *początkiem*. Niech P będzie zbiorem 2021 punktów płaszczyzny spełniających następujące warunki:

(i) żadne trzy punkty ze zbioru P nie są współliniowe oraz

(ii) żadne dwa punkty ze zbioru P nie są współliniowe z początkiem.

Trójkąt o wierzchołkach w zbiorze P nazwiemy *puszystym*, jeśli O leży ściśle wewnątrz tego trójkąta. Wyznaczyć maksymalną liczbę puszystych trójkątów.

Zadanie 6. Czy istnieje nieujemna liczba całkowita a, dla której równanie

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

ma więcej niż milion różnych rozwiązań (m, n), gdzie m, n są dodatnimi liczbami całkowitymi?

Wyrażenie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą (inaczej: podłogę) liczby rzeczywistej x. Na przykład $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ oraz $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Language: Polish

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów

Aby ten konkurs był sprawiedliwy i przyjemny dla wszystkich uczestniczek, nie udostępniaj nikomu treści zadań ani nie odnoś się do nich w internecie czy mediach społecznościowych do wtorku 13 kwietnia, do godz. 14:00.