



2021年4月12日(月曜日)

問題 4. 三角形 ABC の内心を I とし, D を辺 BC 上の点とする. D を通り BI に垂直な直線と CI の交点を E とし, D を通り CI に垂直な直線と BI の交点を F とする. 直線 EF について A と対称な点は直線 BC 上にあることを示せ.

問題 5. 平面上に点 O がある. P を平面上の2021個の点からなる集合であって, 以下をみたすものとする.

- (i) P に含まれるどの3点も同一直線上にない.
- (ii) P に含まれるどの2点も O を通る直線上にない.

P に含まれる点を頂点とする三角形が太っているとは, O がその三角形の内部(周上を含まない)にあることをいう. 太っている三角形の個数としてありうる最大の値を求めよ.

問題 6. 非負整数 a であって, 等式

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

をみたすような正の整数の組 (m, n) が 1000000個より多く存在するようなものはあるか.

ただし, 実数 x に対して x を超えない最大の整数を $\lfloor x \rfloor$ で表す. たとえば $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$, $\lfloor 0 \rfloor = 0$ である.