



Lunedì 12 Aprile, 2021

**Problema 4.** Sia  $ABC$  un triangolo con incentro  $I$  e sia  $D$  un punto arbitrario sul lato  $BC$ . Sia  $E$  il punto di intersezione fra la perpendicolare a  $BI$  per  $D$  e  $CI$ . Sia  $F$  il punto di intersezione fra la perpendicolare a  $CI$  per  $D$  e  $BI$ . Dimostrare che il simmetrico di  $A$  rispetto alla retta  $EF$  appartiene alla retta  $BC$ .

**Problema 5.** Un piano ha un punto speciale  $O$  chiamato origine. Sia  $P$  un insieme di 2021 punti nel piano tali che

- (i) non ci sono tre punti in  $P$  appartenenti ad una stessa retta e
- (ii) non ci sono due punti in  $P$  appartenenti ad una retta per l'origine.

Un triangolo con vertici in  $P$  è *grasso* se  $O$  è strettamente contenuto dentro il triangolo. Determinare il massimo numero di triangoli grassi.

**Problema 6.** Esiste un intero non negativo  $a$  per cui l'equazione

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

ha più di un milione di soluzioni differenti  $(m, n)$  con  $m$  e  $n$  interi positivi?

L'espressione  $\lfloor x \rfloor$  indica la parte intera (o parte intera inferiore) del numero reale  $x$ . Quindi  $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ ,  $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$ ,  $\lfloor 42 \rfloor = 42$  e  $\lfloor 0 \rfloor = 0$ .