



EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Language: Greek

Day: 2

Δευτέρα, 12 Απριλίου, 2021

Πρόβλημα 4. Έστω τρίγωνο ABC με έγκεντρο I και έστω D ένα αυθαίρετο σημείο στην πλευρά BC . Η κάθετη ευθεία από το σημείο D στην ευθεία BI τέμνει την ευθεία CI στο σημείο E . Η κάθετη ευθεία από το σημείο D στην ευθεία CI τέμνει την ευθεία BI στο σημείο F . Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία EF βρίσκεται πάνω στην ευθεία BC .

Πρόβλημα 5. Σε ένα επίπεδο υπάρχει ειδικό σημείο O το οποίο ονομάζουμε αρχή των αξόνων. Έστω P ένα σύνολο από 2021 σημεία του επιπέδου, τέτοια ώστε

- (i) δεν υπάρχουν τρία σημεία του P πάνω στην ίδια ευθεία
- (ii) δεν υπάρχουν δύο σημεία του P πάνω σε ευθεία η οποία περνά από την αρχή των αξόνων.

Ένα τρίγωνο με κορυφές στο σύνολο P ονομάζεται *χοντρό*, αν το O είναι αυστηρά μέσα στο τρίγωνο. Να βρείτε το μέγιστο δυνατό πλήθος των χοντρών τριγώνων.

Πρόβλημα 6. Υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος αριθμός a , για τον οποίο η εξίσωση

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

έχει περισσότερα από ένα εκατομμύριο ζεύγη λύσεων (m, n) , όπου οι m και n είναι θετικοί ακέραιοι;

Η παράσταση $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού x . Έτσι, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ και $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Language: Greek

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται 7 μονάδες

Για να καταστεί αυτός ο διαγωνισμός δίκαιος και ευχάριστος για όλους, παρακαλούμε μην συζητήσετε ή αναφέρετε τα προβλήματα στο διαδίκτυο ή σε κοινωνικά δίκτυα μέχρι την Τρίτη 13 Απριλίου, 15:00