Lundi 12 avril 2021

Problème 4. Soit ABC un triangle dont I est le centre du cercle inscrit et soit D un point quelconque sur le côté $[BC]$. La perpendiculaire à la droite BI passant par D coupe la droite CI en E. La perpendiculaire à la droite CI passant par D coupe la droite BI en F. Montrer que le symétrique de A par rapport à la droite EF appartient à la droite BC.

Problème 5. Soit O un point du plan. Un ensemble $\mathcal{P}$ de 2021 points du plan est tel que

(i) trois points de $\mathcal{P}$ ne sont jamais alignés ;

(ii) deux points de $\mathcal{P}$ ne sont jamais alignés avec O.

Un triangle dont les sommets appartiennent à $\mathcal{P}$ est appelé *fort* si O est strictement intérieur à ce triangle. Déterminer le nombre maximal de triangles forts.

Problème 6. Existe-t-il un entier $a \geqslant 0$ pour lequel l'équation

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

possède strictement plus d'un million de solutions différentes (m, n) où m et n sont des entiers strictement positifs ?

La notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x (c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x). Ainsi $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ et $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Pour que cette compétition reste juste et plaisante pour chacune, évitez de publier ou de discuter des problèmes sur internet ou sur les réseaux sociaux avant mardi 13 avril 14h CEST.