



Maanantai, 12.4.2021

Tehtävä 4. Olkoon kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste I ja olkoon D mielivaltainen piste sivulla BC . Piste D kautta kulkeva suoran BI kanssa kohtisuora suora leikkaa suoran CI pisteessä E . Piste D kautta kulkeva suoran CI kautta kohtisuora suora leikkaa suoran BI pisteessä F . Todista, että pisteen A peilaus suoran EF suhteen on suoralla BC .

Tehtävä 5. Tasossa on erityinen piste O , jota kutsutaan origoksi. Olkoon P tason 2021 pisteen joukko, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- (i) mitkään joukon P kolme pistettä eivät ole samalla suoralla ja
- (ii) mitkään kaksi joukon P pistettä eivät ole suoralla, joka kulkee origon kautta.

Kutsutaan kolmiota *pulleaksi*, jos sen kärjet ovat joukossa P ja piste O on aidosti kolmion sisäpuolella. Määritä pulleiden kolmioiden suurin mahdollinen lukumäärä.

Tehtävä 6. Onko olemassa epänegatiivista kokonaislukua a , jolle yhtälöllä

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

on yli miljoona eri ratkaisua (m, n) , missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja?

Lauseke $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa reaaliluvun x kokonaisosaa (lattiaa). Esimerkiksi $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ ja $\lfloor 0 \rfloor = 0$.