pondělí 12. dubna 2021

Úloha 4. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice jemu vepsané a zvolme libovolný bod D na straně BC. Označme E průsečík přímky kolmé na BI procházející bodem D s přímkou CI. Označme F průsečík přímky kolmé na CI procházející bodem D s přímkou BI. Dokažte, že obraz bodu A v osové souměrnosti podle přímky EF leží na přímce BC.

Úloha 5. V rovině zvolme bod O a nazvěme jej počátek. Nechť P je množina 2021 bodů v této rovině takových, že

(i) žádné tři body z množiny P neleží na jedné přímce a

(ii) žádné dva body z množiny P neleží na přímce procházející počátkem.

Trojúhelník s vrcholy v množině P nazveme *tlustý*, pokud O je jeho vnitřním bodem. Určete maximální počet tlustých trojúhelníků.

Úloha 6. Existuje nezáporné celé číslo a, pro které má rovnice

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

více než milión různých řešení (m, n), kde m a n jsou kladná celá čísla?

Výraz $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x. Tedy $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ a $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat až 7 bodů

Aby soutěž byla regulérní a příjemná pro všechny soutěžící, nezmiňujte prosím úlohy a nediskutujte o nich na internetu a sociálních sítích do úterý 13. dubna, 14:00 hodin.