



ponedjeljak, 12. travnja 2021.

**4. zadatak.** Neka je  $ABC$  trokut sa središtem upisane kružnice  $I$  i neka je  $D$  bilo koja točka na stranici  $\overline{BC}$ . Neka pravac kroz  $D$  okomit na  $BI$  siječe pravac  $CI$  u točki  $E$ . Neka pravac kroz  $D$  okomit na  $CI$  siječe pravac  $BI$  u točki  $F$ . Dokaži da točka osnosimetrična točki  $A$  u odnosu na pravac  $EF$  leži na pravcu  $BC$ .

**5. zadatak.** U ravnini je posebna točka  $O$  koju zovemo ishodište. Neka je  $P$  skup od 2021 točke u toj ravnini sa svojstvom da

- (i) nikoje tri točke iz  $P$  ne leže na istom pravcu i
- (ii) nikoje dvije točke iz  $P$  ne leže na pravcu koji prolazi kroz ishodište.

Trokut s vrhovima iz  $P$  je *debeo* ako je  $O$  u unutrašnjosti trokuta. Odredi najveći mogući broj debelih trokuta.

**6. zadatak.** Postoji li nenegativan cijeli broj  $a$  za koji jednadžba

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

ima više od milijun različitih rješenja  $(m, n)$  gdje su  $m$  i  $n$  prirodni brojevi?

Izraz  $\lfloor x \rfloor$  označava cjelobrojni dio (najveće cijelo) realnog broja  $x$ . Dakle,  $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ ,  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\lfloor 22/7 \rfloor = 3$ ,  $\lfloor 42 \rfloor = 42$  i  $\lfloor 0 \rfloor = 0$ .