EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Language: **Bulgarian**

Day: **2**

Понеделник, 12 Април, 2021

Задача 4. Нека ABC е триъгълник с център на вписаната окръжност I и нека D е произволна точка от страната му BC. Нека правата през D, перпендикулярна на BI, пресича CI в точката E. Нека правата през D, перпендикулярна на CI, пресича BI в точката F. Докажете, че симетричната точка на A спрямо правата EF лежи на правата BC.

Задача 5. В равнината е взета специална точка O, която ще наричаме начало. Нека P е множество от 2021 точки в равнината, такова че

(i) никои три точки от P не лежат на една права и

(ii) никои две точки от P не лежат на права, минаваща през началото.

Триъгълник с върхове, които са точки от P, ще наричаме дебел, ако O е във вътрешността на триъгълника. Намерете максималния възможен брой дебели триъгълници.

Задача 6. Съществува ли неотрицателно цяло число a, за което уравнението

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

има повече от един милион различни решения (m, n), където m и n са естествени числа?

Със $\lfloor x \rfloor$ означаваме цялата част на реалното число x. Например, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ и $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

С цел да се запази честността на състезанието, моля не обсъждайте публично и не разпространявайте задачите онлайн или чрез социалните мрежи до 15:00 часа във вторник, 13 април.