

**Soru 5.**  $p, q$  asal sayıları bir  $n$  pozitif tam sayısı için

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

eşitliğini sağlıyor.  $q - p$  nin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

**Soru 6.** *Suratkitabı* sosyal ağında sonsuz çoklukta üye kayıtlıdır. Bazı üye çiftleri *arkadaş* olarak kayıtlıdır, ama her üyenin sonlu sayıda arkadaşı vardır. Her üyenin en az bir arkadaşı vardır. (*Arkadaşlık simetriktir; yani, A, B nin arkadaşı ise, B de A nın arkadaşıdır.*)

Her üyenin bir arkadaşını en iyi arkadaş olarak belirlemesi gerekmektedir.  $A, B$  yi en iyi arkadaş olarak belirlerse, (maalesef)  $B$  nin de  $A$  yı en iyi arkadaş olarak belirlemesi gerekmemektedir. En iyi arkadaş olarak belirlenmiş bir üyeye *1-en iyi arkadaş* denilmektedir. Daha genel olarak,  $n > 1$  bir pozitif tam sayı olmak üzere,  $(n - 1)$ -en iyi arkadaş olan bir üyenin en iyi arkadaş olan bir üyeye *n-en iyi arkadaş* denilmektedir. Tüm  $k$  pozitif tam sayıları için *k-en iyi arkadaş* olan bir üyeye *popüler* denilmektedir.

- Her popüler üyenin başka en az bir popüler üyenin en iyi arkadaşı olduğunu kanıtlayınız.
- Üyelerin sonsuz çoklukta arkadaş olmasına izin verilseydi, bir popüler üyenin hiçbir popüler üyenin en iyi arkadaşı olmamasının mümkün olduğunu gösteriniz.

**Soru 7.** Dar açılı bir  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi  $\Gamma$  ve diklik merkezi  $H$  olsun.  $K, \Gamma$  üstünde ve  $BC$  doğrusunun  $A$  ya göre farklı tarafında yer alan bir nokta olsun.  $K$  noktasının  $AB$  doğrusuna göre yansıması  $L$  noktası ve  $K$  noktasının  $BC$  doğrusuna göre yansıması da  $M$  noktası olsun.  $\Gamma$  ile  $BLM$  üçgeninin çevrel çemberi ikinci kez  $E$  noktasında kesişsin.  $KH, EM$  ve  $BC$  doğrularının ortak bir noktadan geçtiğini gösteriniz. (*Bir üçgenin diklik merkezi her üç yüksekliğinin de geçtiği noktadır.*)

**Soru 8.** Bir alfabeye ait harflerden oluşan sonlu bir diziye bir *kelime* diyelim. Birbirinin aynı en az iki altkelimesinin arka arkaya gelmesinden oluşan bir kelimeye *tekrarlı* diyelim (örneğin, *ababab* ve *abcabc* tekrarlıdır, ama *ababa* ve *aabb* değildir). Bir kelimenin herhangi komşu iki harfinin yerinin değiştirilmesiyle oluşan her kelime tekrarlı oluyorsa, bu kelimenin tüm harflerinin aynı olduğunu kanıtlayınız. (Birbirinin aynı olan komşu iki harfinin yerinin değiştirilmesinin bir kelimeyi aynı bıraktığına dikkat ediniz.)