

Language: Arabic

Day: 2

EGMO | 2012
European Girls' Mathematical Olympiad

الجمعة 13 أبريل 2012

السؤال الخامس. العدان p و q أوليان ويحققان الخاصية التالية:

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

لعدد صحيح موجب n . أوجد جميع القيم الممكنة لـ $q - p$.

السؤال السادس. هناك عدد لا نهائي من الناس المشتركين بالشبكة الاجتماعية **وجه الكتاب**. يمكن لشخصين مختلفين من المشتركين بالشبكة أن يسجلوا كـ **أصدقاء** بشرط أن يكون لكل مشترك عدد منتهى من الأصدقاء. كل مشترك يجب أن يكون **صديق** لمشارك واحد آخر على الأقل. (الأصدقاء علاقة تبادلية، أي أنه إذا كان A صديق لـ B فإن B صديق لـ A).

يجب على كل مشترك أن يختار واحداً من أصدقائه كـ **صديق مفضل**. إذا اختار المشترك A المشترك B كصديق مفضل فليس من الضروري أن يختار المشترك B المشترك A كصديق مفضل. إذا تم اختيار مشترك كصديق مفضل فإنه يسمى **1- صديق مفضل**. بشكل عام، إذا كان $n > 1$ عدد صحيح موجب، فإننا نسمي مشترك بأنه **n - صديق مفضل** إذا كان صديقاً مفضلاً لمشارك وهذا المشترك هو $(n-1)$ - صديق مفضل لمشارك آخر. كذلك نقول عن مشترك أنه **محبوب** إذا كان k - صديق مفضل لكل عدد صحيح موجب k .

أ. أثبت أن كل مشترك محبوب هو صديق مفضل لمشارك محبوب آخر.

ب. أثبت أنه إذا كان من الممكن أن يكون للمشاركين عدد لا نهائي من الأصدقاء فإنه يمكن إيجاد شخص محبوب ولكنه ليس صديق مفضل لمشارك محبوب آخر.

السؤال السابع. ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا دائرته المحيطية Γ و H ملتقى ارتفاعاته. لتكن K نقطة على الدائرة Γ على الجهة الأخرى من الضلع BC التي تختلف عن جهة A . لتكن النقطة L الصورة المنعكسة للنقطة K باستخدام المستقيم AB ، ولتكن النقطة M الصورة المنعكسة للنقطة K باستخدام المستقيم BC . لتكن النقطة الثانية لتقاطع الدائرة Γ مع الدائرة المحيطية للمثلث BLM . أثبت أن الخطوط المستقيمة KH ، EM و BC تلتقي عند نقطة واحدة. (ملتقى الارتفاعات لمثلث هو النقطة التي تلتقي عندها ارتفاعاته).

السؤال الثامن. نعرف **الكلمة** بأنها متتالية منتهية من الحروف من أبجدية ما. نقول عن كلمة أنها **مكررة** إذا حصلنا عليها من تجاور كلمتين جزئيتين متمثلتين على الأقل (مثلاً الكلمتين $ababab$ و $abcabc$ كلمات مكررة، ولكن $ababa$ و $aabb$ ليست كلمات مكررة). أثبت أنه إذا كانت لأي كلمة الخاصية التالية "تبديل مكان أي حرفين متجاورين يجعل الكلمة مكررة" فإن جميع حروف الكلمة متطابقة. (لاحظ أنه يمكن تبديل حرفين متطابقين متجاورين في كلمة بدون أن تتغير الكلمة).

Language: Arabic

الزمن: 4 ساعات و 30 دقيقة
الدرجات: 7 درجات لكل سؤال