

Пятница, 13 апреля 2012

Задача 5. Простые числа p и q удовлетворяют условию

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

для некоторого натурального n . Найдите все возможные значения $q - p$.

Задача 6. Бесконечное количество людей зарегистрированы в социальной сети *Mugbook*. Некоторые пары (различных) пользователей зарегистрированы как *друзья*, но у каждого только конечное количество друзей. У каждого пользователя есть по крайней мере один друг. (*Дружба симметрична, т.е. если A друг B , то B — друг A .*)

Каждый человек должен назвать одного из своих друзей *лучшим другом*. Если A называет B своим лучшим другом, то (к сожалению) это не значит, что B обязательно назовет A своим лучшим другом. Особа, которую назвали лучшим другом, называется *1-лучшим другом*. Вообще для натурального $n > 1$ пользователь называется *n -лучшим другом*, если его назвал лучшим другом человек, который является $(n-1)$ -лучшим другом. Особа, которая является *k -лучшим другом* для любого натурального k , называется *популярной*.

- (a) Докажите, что каждая популярная особа является лучшим другом другой популярной особы.
- (b) Докажите, что если у пользователей может быть бесконечное количество друзей, то может случиться так, что популярная особа не является лучшим другом популярной особы.

Задача 7. Пусть ABC — остроугольный треугольник с описанной окружностью Γ и ортоцентром H . Пусть K — точка на окружности Γ по другую сторону от точки A относительно BC . Пусть L — симметрична K относительно AB , а M — симметрична K относительно прямой BC . Пусть E — вторая точка пересечения Γ и описанной окружности треугольника BLM . Докажите, что прямые KH , EM и BC пересекаются в одной точке. (*Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот.*)

Задача 8. Слово — это конечная последовательность букв из некоторого алфавита. Слово называется *повторяющимся*, если это сцепление по крайней мере двух одинаковых подслов (например, $ababab$ и $abcabc$ — повторяющиеся, а $ababa$ и $aabb$ — нет). Докажите, что если в слове любая перестановка двух соседних букв делает слово повторяющимся, то все буквы в этом слове одинаковы. (Заметим, что перестановка двух соседних одинаковых букв оставляет слово неизменным.)