

Language: **Latvian**

Day: **2**

Piektdien, 2012. gada 13. aprīlī.

5. uzdevums. Pirmskaitļi p un q ir tādi, ka kādam naturālam skaitlim n :

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}.$$

Atrodiet visas iespējamās $q - p$ vērtības

6. uzdevums. Sociālajā tīklā *Mugbook* ir reģistrējušies bezgalīgi daudz lietotāji. Daži lietotāju pāri (pāris sastāv no diviem dažādiem lietotājiem) ir reģistrējušies kā *Draugi*. Katram lietotājam Draugu skaits ir galīgs, un katram lietotājam ir vismaz viens Draugs. (*Draudzība ir simetriska; tas ir, ja A ir B Draugs, tad arī B ir A Draugs.*)

Katrs dalībnieks nominē kādu no saviem Draugiem par savu *Labāko draugu*. Ja A nominē B kā savu Labāko draugu, tad (diemžēl) no tā neseko, ka B obligāti nominēs A kā savu Labāko draugu. Ja kāds ir nominēts par Labāko draugu, tad viņš tiek saukts par *1.-labāko draugu*. Un vispārīgi, ja $n > 1$ ir naturāls skaitlis, tad lietotājs ir *$n - 1$ -tais-labākais draugs*, ja viņš ir nominēts, kā Labākais draugs kādam, kurš pats ir $(n - 1) - \text{ais-labākais draugs}$. Lietotājs, kurš ir *k -tais-labākais draugs* katram naturālam k , tiek saukts par *Populāru*.

- (a) Pierādiet, ka katrs Populārs lietotājs ir Labākais draugs kādam Populāram lietotājam.
- (b) Pierādiet, ka, ja lietotājiem varētu būt bezgalīgi daudz draugu, tad ir iespējams, ka Populārs lietotājs nav Labākais draugs nevienam Populāram lietotājam.

7. uzdevums. Šaurleņķa trijstūrim ABC apvilka riņķa līnija Γ un dots tā ortocentrs H . Punkts K ir riņķa līnijas Γ punkts, kurš atrodas otrā pusē no BC nekā A . L ir punktam K simetrisks punkts attiecībā pret taisni AB , un M ir punktam K simetrisks punkts attiecībā pret taisni BC . Punkts E ir otrs riņķa līnijas Γ un trijstūrim BLM apvilktās riņķa līnijas krustpunkts. Pierādiet, ka taisnes KH , EM un BC krustojas vienā punktā. (*Trijstūra ortocentrs ir trijstūra augstumu krustpunkts.*)

8. uzdevums. Par *vārdu* sauksim kāda alfabēta burtu galīgu sekvenci. Teiksim, ka vārds ir *ar atkātojumiem*, ja tas sastāv no divu vai vairāku identisku *vārdu* apvienojuma (piemēram, *ababab* un *abcabc* ir ar atkātojumiem, bet *ababa* un *aabb* nav).

Pierādiet, ja *vārdam* jebkuru divu blakus burtu savstarpējas maiņas rezultāts ir vārds ar atkātojumiem, tad visi tā burti ir identiski. (Piezīme. Divu vienādu burtu maiņa, saglabā *vārdu* nemainīgu.)