Language: **Italian**

Day: **1**

Giovedì, 12 aprile 2012

Problema 1. Sia ABC un triangolo di circocentro O. Sono dati i punti D, E e F appartenenti alla parte interna dei lati BC, CA e AB rispettivamente, in modo tale che DE sia perpendicolare a CO e DF sia perpendicolare a BO. (Con *appartenenti alla parte interna* si intende ad esempio, che il punto D giace sulla retta BC ed è strettamente compreso tra B e C.)

Sia K il circocentro del triangolo AFE. Dimostrare che le rette DK e BC sono ortogonali.

Problema 2. Sia n un intero positivo. Determinare in funzione di n il più grande intero m con la seguente proprietà: è possibile riempire una tabella formata da m righe ed n colonne con dei numeri reali, in modo tale che per ogni coppia di righe distinte $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ e $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ valga:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Problema 3. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x) \,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Un insieme di interi A è detto *interamente sommato* se $A \subseteq A + A$, ovvero se ciascun elemento $a \in A$ è somma di due elementi $b, c \in A$ non necessariamente distinti. Un insieme di interi A è detto *libero da somme zero* se 0 è l'unico intero che non può essere espresso come somma degli elementi di un insieme finito e non vuoto di A.

Dire se esiste un insieme di interi che sia interamente sommato e libero da somme zero.

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti