

Language: Finnish

Day: 1

EGMO | 2012
European Girls' Mathematical Olympiad

Torstai, 12. huhtikuuta, 2012

Tehtävä 1. Olkoon ABC kolmio, jonka ympäripiirretyn ympyrän keskipiste on O . Pisteet D , E ja F ovat sivujen BC , CA ja AB sisäpisteitä, tässä järjestyksessä, niin että DE on kohtisuorassa CO :n kanssa ja DF on kohtisuorassa BO :n kanssa. (Se, että piste on sisäpiste, tarkoittaa esimerkiksi että piste D on suoralla BC , ja että D on pisteiden B ja C välissä tuolla suoralla.)

Olkoon K kolmion AFE ympäripiirretyn ympyrän keskipiste. Osoita, että suorat DK ja BC ovat kohtisuorassa.

Tehtävä 2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Määritä luvun n funktiona suurin mahdollinen positiivinen kokonaisluku m , jolla on seuraava ominaisuus: Taulukko, jossa on m riviä ja n saraketta voidaan täyttää reaalityyppisillä niin, että mille tahansa kahdelle eri riville $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ ja $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ pätee

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1.$$

Tehtävä 3. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joilla

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 4. Kokonaisluvuista koostuvaa joukkoa A kutsutaan *summatäydeksi*, jos $A \subseteq A + A$, eli jos jokainen joukon A alkio $a \in A$ on joukon A jonkin alkio $b, c \in A$ summa (b ja c eivät välttämättä ole erisuuria). Kokonaisluvuista koostuvan joukon A sanotaan olevan *nollasummavapaa*, jos 0 on ainoa kokonaisluku, jota ei voida esittää joukon A äärellisen epättyhjän osajoukon alkioiden summana.

Onko olemassa summatäyttä nollasummavapaata kokonaisluvuista koostuvaa joukkoa?